I. S. F. A. 2005-2006

Concours d'Entrée

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

OPTION A

EXERCICE 1

Le but de cet exercice est le calcul des deux intégrales

$$C(x)=\int_o^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\frac{dt}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad S(x)=\int_o^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)\frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

1) Etablir les relations : $C'(x)=-xS'(x)-\frac{1}{2}S(x)$

$$S'(x)=xC'(x)+\frac{1}{2}C(x) \quad .$$

2) En déduire que C et S sont deux fonctions, de classe $\mathscr{C}^1$, vérifiant sur $\mathbb{R}$ le système différentiel :

$$\begin{cases} 2\left(1+x^2\right)u'(x)+xu(x)=-v(x) \\ 2\left(1+x^2\right)v'(x)+xv(x)=u(x) \end{cases} .$$

3) Montrer que la fonction $G(x)=\left(\int_o^x e^{-t^2}dt\right)^2+\int_o^1\frac{e^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{\left(1+t^2\right)}dt$ est constante sur $\mathbb{R}$. Que vaut cette constante ?

En déduire la valeur de l'intégrale $\int_o^{+\infty} e^{-t^2}dt$ puis la valeur de $C(0)$.

4) Montrer que si $\alpha(x)$ *et* $\beta(x)$ sont deux fonctions dérivables vérifiant sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2\left(1+x^2\right)\alpha'(x)=-\beta(x) \\ 2\left(1+x^2\right)\beta'(x)=\alpha(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha(0)=\sqrt{\pi} \\ \beta(0)=0 \end{cases} .$$

Alors $\alpha^2(x)+\beta^2(x)=\pi$ pour tout x de $\mathbb{R}$. En faisant un changement de fonction inspirée par ce résultat, trouver $\alpha(x)$ *et* $\beta(x)$.

5) Trouver $C(x)$ et $S(x)$ pour tout x réel.

PROBLEME

- $\mathbb{R}^k$ $(k=n \text{ ou } p)$ est muni de la structure euclidienne standard. On utilise les conventions usuelles du calcul matriciel un vecteur x est écrit spontanément en colonne $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$. Si on veut l'écrire en ligne, on écrit $x^T=(x_1,x_2,\ldots,x_k)$. De sorte que si y est un autre vecteur de $\mathbb{R}^k$, $x^Ty=y^Tx$ désigne le produit scalaire de x par y et $\|x\|=\sqrt{x^Tx}$ la norme (euclidienne) du vecteur x.

- Soit X une matrice à coefficients réels ayant p lignes et n colonnes, on note aussi X l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ ayant X pour matrice relativement aux bases canoniques. X^T la matrice n lignes p colonnes, transposée de X est encore identifiée à l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ correspondante.

I

1. Justifier le fait que les valeurs propres de $X^T X$ et de XX^T sont positives ou nulles et l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres de chacun de ces endomorphismes.
2. Si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de $X^T X$ et u un vecteur propre unitaire correspondant, montrer que $v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Xu$ est aussi un vecteur propre unitaire de XX^T associé à λ valeur propre de XX^T. Montrer que $u = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X^T v$.
3. Montrer que 0 est valeur propre de $X^T X$ si et seulement si $\ker(X)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. On note α l'ordre de multiplicité de 0 en tant que valeur propre de $X^T X$ et on pose $r = n - \alpha$, montrer que $r = rg(X)$ (la dimension de $\mathrm{Im}(X)$). En déduire que si p est strictement supérieur à r : 0 est aussi valeur propre de XX^T. Quel est l'ordre de multiplicité de 0 en tant que valeur propre de XX^T ?
4. On désigne par λ_i, $i = 1 \ldots n$, les valeurs propres de $X^T X$, classées par ordre décroissant, répétées autant de fois que leur ordre de multiplicité. Par définition de r, si $r < n : \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \ldots = \lambda_n = 0$. A chaque valeur propre on associe une base orthonormée du sous espace propre correspondant ; de sorte que l'on obtient une base orthonormée $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant, pour $i = 1 \ldots n$, u_i est un vecteur propre unitaire de $X^T X$ associée à la valeur propre λ_i.

   Montrer que $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n\}$ est une base de $\ker(X)$, que $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ est une base de $\mathrm{Im}\left(X^T\right)$ et que $\{v_1, \ldots v_r\}$ est une base de $\mathrm{Im}(X)$ (Rappelons que $v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Xu_i \quad i = 1 \ldots r$).

   Enfin on note $\{v_{r+1} \ldots v_p\}$ une quelconque base orthonormée de $\ker\left(X^T\right)$ permettant de compléter $\{v_1, \ldots v_r\}$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$.
5. Montrer que $\sum_{i=1}^{r} u_i u_i^T$ est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{Im}\left(X^T\right)$ et que $\sum_{i=1}^{r} v_i v_i^T$ est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^p$ sur $\mathrm{Im}(X)$. Montrer que pour tout b de $\mathbb{R}^p$

   $$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{Min} \|Xx - b\|^2 = \sum_{i=r+1}^{P} \left(v_i^T b\right)^2 .$$
6. Montrer que $X = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i v_i u_i^T$ où l'on a posé $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour $i = 1 \ldots r$.

   Les $\sigma_i \,(i = 1 \ldots r)$ s'appellent les valeurs singulières de X et la somme précédente la décomposition en valeurs singulières de X.
7. Pour la matrice $X = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; $u_1, u_2, u_3 \quad v_1, v_2$.

II

1. Pour chaque y de $\mathbb{R}^p$ on note $p_X(y)$ la projection orthogonale de y sur $\operatorname{Im}(X)$.

   Montrer que $X^{-1}(\{p_X(y)\})$ est un sous espace affiné de $\mathbb{R}^n$. A quel sous espace vectoriel est-il parallèle ? Montrer qu'il existe un unique y' dans l'intersection $X^{-1}(\{p_X(y)\}) \cap (\ker(X))^{\perp}$. Montrer que l'application $y \to y'$ est linéaire. On la note X^+. Si X est bijective, montrer que $X^+ = X^{-1}$. X^+ est appelée la pseudo inverse de X.

2. Montrer que $X^+ = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} u_i v_i^T$.

   On désigne par $\mathcal{M}(p,n)$ l'espace vectoriel des matrices p lignes, n colonnes à coefficients réels et pour $A \in \mathcal{M}(p,n)$ on note (classiquement) $\|A\|_F$ la norme de Frobenius de A c'est-à-dire si $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots p \text{ indice ligne} \\ j=1\dots n \text{ indice colonne}}}$

   on a $\|A\|_F^2 = \sum_{\substack{j=1\dots n \\ i=1\dots p}} (a_{ij}^2)$ (somme double) .

3. Montrer que $\|X\|_F^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_r^2$ alors que l'on sait que $\|X\|_2 = \sigma_1$ (où $\|X\|_2 = \sup_{\|x\|=1} \|X_x\|$) /

Ce résultat n'est utilisé que dans la partie III de la suite.

4. Montrer que XX^+ est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^p$ sur $\operatorname{Im}(X)$. En déduire que $X^+ \in \mathcal{M}_{(n,p)}$ est solution du problème d'optimisation

   $$\underset{Y \in \mathcal{M}(n,p)}{Min} \|XY - I_P\|_F$$

   où I_p est la matrice identité pxp. On notera que la norme de Frobenius utilisée dans cette question est celle de $\mathcal{M}(p,p)$!

III

Dans cette partie on suppose que $r = rg(X)$ est supérieur ou égal à 2.

1. On note U la matrice orthogonale (pourquoi ?) nxn
   $U = [u_1 | u_2 | \ldots | u_n]$ et V la matrice orthogonale $V = [v_1 | v_2 | \ldots | v_p]$ et pour $k = 1 \ldots r$, Σ_k la matrice nxp dont tous les termes sont nuls sauf les k premiers termes diagonaux qui valent $\sigma_i \, (i = 1 \ldots k)$, soit donc

   $$\Sigma_k = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \sigma_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \sigma_k & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

   . Montrer que si l'on pose $X_k = V \Sigma_k U^T$, on a

   $rg(X_k) = k \quad (k = 1 \ldots r)$; $X_r = X$ et $\|X - X_k\|_2 = \sigma_{k+1}$ pour $k = 1 \ldots (r-1)$.

2. On note Y une quelconque matrice (pxn) de rang k ($k = 1 \ldots (r-1)$).
   Montrer qu'il existe une base orthonormée $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-k}\}$ de $\ker(Y)$ puis un vecteur non nul z appartenant à $\ker(Y)_{\cap}\, vect\langle u_1, \ldots, u_k, u_{k+1} \rangle$.

En posant $\zeta = \frac{z}{\|z\|}$ montrer que $\|(X-Y)\zeta\|^2 \geq \sigma_{k+1}^2$.

3. En déduire que $X_k\ (k=1\ldots r)$ est solution du problème d'optimisation :

$$Min\|X-Y\|_2$$
$$\{Y \in \mathcal{M}(p,n), rg(Y)=k\} .$$
